

2017-2018 учебный год



МАТЕМАТИКА

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

Максимальное количество баллов за задания:

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Сумма
Количество баллов	5	5	7	5	5	7	5	7	5	5	7	7	70

Все оценки должны быть целыми числами, дробные оценки не допускаются!

ОТВЕТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ

1. Ответ: нет, не следует.

Решение: Рассмотрим, например, ситуацию, когда турист первые полчаса идет со скоростью 10 км/ч, а следующие полчаса отдыхает (скорость 0 км/ч). Тогда, в любой промежуток времени длиной 1 час он проходит 5 км. Таких промежутков 4 – он пройдет за это время $4 \cdot 5 = 20$ км. Тогда, средняя скорость за весь поход $20 \text{ км} / 3,5 \text{ ч} = 40/7 \neq 5$ км/ч. Возможны и другие способы обоснования. Цель – показать пример неравномерного движения, при котором средняя скорость не равна заданной.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Ошибки в обосновании – 2-3 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

2. Ответ: 7317192329.

Решение: Рассмотрим первые 10 простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и составим из них требуемое число: 2357111317192329. При вычеркивании ровно 6 цифр получится десятизначное число, для которого наибольшее значение будет при наибольшем возможном значении старшего разряда (первой цифры), и далее по порядку. Т.к. из первых 7 цифр наибольшей является 7, то вычеркнем первые три цифры: 7111317192329. Из последующих четырех цифр наибольшей является 3, потому вычеркиваем три единицы: 7317192329.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

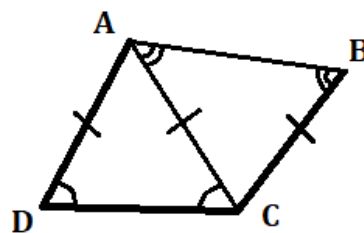
3. Ответ: нет, не могло.

Решение: Рассмотрим произвольные два целых числа x и y . Их сумма $(x + y)$, их произведение $(x \cdot y)$ и, окончательно, результат произведения $A = x \cdot y \cdot (x + y)$. Докажем, что полученное число A всегда чётно. Действительно, если числа x и y одинаковой чётности, то их сумма чётное число и результат A – чётное. Если же числа x и y разной чётности, то их произведение чётное число и результат A – чётное. А так как число 201520162017 – нечётное, то никак не может являться результатом произведения.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Ошибки в обосновании – 2-4 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

4. **Ответ:** 58° .

Решение: Рассматривая треугольник ACD , вычислим величину угла $\angle D = 180^\circ - \angle ACD - \angle DAC = 57^\circ$, откуда заметим, что треугольник ACD равнобедренный и $AD = AC$, а так как по условию $AD = BC$, то $AC = BC$ и треугольник ABC также равнобедренный, откуда следует равенство соответствующих углов $\angle BAC = \angle ABC$. А так как сумма $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$, то $\angle BAC = \angle ABC = 58^\circ$. Могут быть и другие решения.



Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

5. **Ответ:** 1009.

Решение: Рассмотрим любого рыцаря. Он говорит: "Среди оставшихся жителей острова более половины – лжецы" и это правда, следовательно, из оставшихся 2016 жителей более половины – лжецы (не менее 1009 человек). Рассмотрим теперь любого лжеца. Он говорит: "Среди оставшихся жителей острова более половины – лжецы" и при этом это ложь, следовательно, неверно, что не менее 1009 из оставшихся 2016 жителей – лжецы. Тогда верно то, что лжецов среди остальных половина от 2016 или меньше. Но так как лжецов не менее 1009, а вместе с тем, кого спрашивают их не более $1008+1$, то лжецов ровно 1009 человек, следовательно, рыцарей $2017-1009=1008$.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

6. **Ответ:** нет, не является.

Решение: Заметим, что число 2015201520172018 является чётным числом, следовательно, могло быть образовано только как квадрат другого чётного числа. Следовательно, полученный квадрат должен делиться на 4. Но по признаку делимости на число 4 последние две цифры числа должны составлять двузначное число, которое делится на 4 нацело, но число 18 не делится на 4, что противоречит сделанному предположению о полном квадрате. Могут быть и другие методы обоснования.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Ошибки в обосновании – 2-4 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

7. **Ответ:** 11 или 19 или 21 или 29.

Решение: В задаче есть неопределенность, потому в зависимости от того, в каком направлении по ходу маршрута, и кто за кем (если в одну сторону) следуют звездолёты, расстояние может быть разным в 4-х различных комбинациях.

Критерии оценки. Верный ответ (все четыре результата) – 5 баллов. Если верно указаны только 3 ответа – 3 балла, только 2 ответа – 2 балла, только 1 ответ – 1 балл. Неверный ответ – 0 баллов.

8. **Ответ:** нет, нельзя.

Решение: Методом инвариантов. Пусть при любой комбинации монет решка на каждой монете соответствует числу (+1), а орёл на монете (-1). Тогда при переворачивании 20-ти монет ровно 20 чисел меняют свой знак на обратный, а одно число его не меняет. Следовательно, число, равное произведению (+1) и (-1) соответствующих решкам и орлам не меняет знак при переворачивании 20 монет (это и есть инвариант). Рассматривая теперь первоначальное положение всех монет решками

вверх, получим значение инварианта для него (+1) и при любой последовательности переворачиваний ровно по 20 монет это число неизменно и равно (+1). Но для случая, когда все монеты легли орлом вверх, соответствующий инвариант равен (-1), что не могло произойти в результате перекалываний. Могут быть и другие методы обоснования.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Ошибки в обосновании – 2-4 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

9. Ответ: 66 косточек.

Решение: Заметим, что в наборе домино есть дубли – их будет 11 штук, а на остальных косточках – разные значения, каждое с каждым по одному разу, то есть $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ штук. В итоге, всего косточек $11 + 55 = 66$ штук.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

10. Ответ: среда.

Решение: Легко убедиться, что между днём, когда "вчера" было "завтра", и днём, когда "послезавтра" станет "вчера", проходит 4 дня. Значит, интересующие нас дни не могут одинаково отстоять от одного и того же воскресенья, а могут только от двух разных. Это возможно, если первый из дней – понедельник, второй – суббота, а сегодня – среда.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

11. Решение: Выберем две планеты (назовём их А1 и Б1), расстояние между которыми будет наименьшим из всех (такое гарантируется условием задачи). По условию задачи, астрономы на этих планетах наблюдают ближайшую, то есть астроном с планеты А1 наблюдает планету Б1 и наоборот, астроном с Б1 наблюдает А1. Тогда, рассмотрим оставшиеся 13 планет, где по условию найдётся еще пара планет (назовём их А2 и Б2), расстояние между которыми наименьшее из оставшихся пар расстояний. Аналогично первой паре планет, астрономы наблюдают своего ближайшего соседа. Продолжая далее, придём к заключению, что на оставшейся одной планете (назовём А8) астроном наблюдает планету, ближайшую к нему (одну из перечисленных 14-ти ранее). А вот саму планету А8 наблюдать некому. Могут быть и другие обоснования.

Критерии оценки. Верное обоснование – 7 баллов. Ошибки в обосновании, не нарушающие ход доказательства (например, разобраны не все случаи при переборном решении) – 1-3 балла. Грубые ошибки при доказательстве (неверные и необоснованные утверждения) – 0 баллов.

12. Ответ: ребус решения не имеет.

Решение: Заметим, что число ДДЕЕ, удовлетворяет признаку делимости на 11, откуда следует, что хотя бы одно из чисел-сомножителей кратно 11. Но ни одно из двух двузначных чисел не удовлетворяет признаку делимости на 11, иначе должно было бы содержать две одинаковые цифры. Отсюда вывод – ребус не имеет решения. Могут быть и другие способы обоснования, например, переборные.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Ошибки и недочёты в обосновании при правильном ответе (например, не все случаи при переборном решении рассмотрены или сделаны необоснованные утверждения) – 1-3 балла. Неверный ответ – 0 баллов.